Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 9

Baza ortonormalna

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

H – ustalona przestrzeń Hilberta.

Def: Rodzinę wektorów $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq H$ nazywamy układem

- **ortogonalnym**, jeśli $e_i \perp e_j$ dla $i \neq j$ (tzn. $\langle e_i, e_j\rangle = 0,\ i \neq j$).
- **ortonormalnym**, jeśli $e_i \perp e_j$, gdy $i \neq j$ oraz $\|e_i\| = 1$, tzn.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j \in I.$$

Każdy ortogonalny układ wektorów $\{u_i\}_{i\in I}$ niezerowych można unormować do układu ortonormalnego $\{e_i\}_{i\in I}$ kładąc $e_i := \frac{u_i}{\|u_i\|}$:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle = \frac{\langle u_i, u_j\rangle}{\|u_i\|\|u_j\|} = \delta_{i,j} \cdot \frac{\langle u_i, u_i\rangle}{\|u_i\|\|u_i\|} = \delta_{i,j}.$$

Stw. (Ortogonalizacja Grama-Schmidta)

Jeśli $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq H$ liniowo-niezależne oraz $M = \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, to

$$u_1 := x_1, \quad u_2 := x_2 - P_{u_1}x_2, \quad \ldots, \quad u_n := x_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_{u_i}x_n$$

tworzą układ ortogonalny $\{u_i\}_{i=1}^n$ taki, że $M = \mathrm{lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Stw. Jeśli $M = \text{lin}\{e_1, ..., e_n\}$, gdzie $\{e_i\}_{i=1}^n$ układ ortonormalny, to

$$P_M x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \qquad \text{dla każdego } x \in H.$$

Ponadto, $\|P_M x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$ dla $x \in H$.

Dowód: Niech $x \in H$. Wtedy $P_M x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{F}$, oraz

$$\langle x, e_i \rangle \overset{e_i \in M}{=\!=} \langle x, P_M e_i \rangle \overset{P_M = P_M^*}{=\!=\!=} \langle P_M x, e_i \rangle = \langle \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, e_i \rangle$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle \overset{\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{i,j}}{=\!=} \lambda_i.$$

Stąd $P_M x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ oraz

$$\|P_M x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \overline{\lambda}_j \langle e_i, e_j \rangle \overset{\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{i,j}}{=\!=} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$$

$$= \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2. \qquad \blacksquare$$

Wn. (Nierówność Bessela)

Dla dowolnego układu ortonormalnego $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq H$ mamy

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

Dowód: Niech $A \subseteq I$ skończony i niech $M = \text{lin}\{e_i : i \in A\}$ przestrzeń liniowa rozpięta przez wektory $\{e_i\}_{i\in A}$. Wtedy

$$\sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2 \overset{Stw}{=\!=} \|P_M x\|^2 \overset{\|P_M\|\leqslant 1}{\leqslant} \|x\|^2.$$

Stąd $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{\substack{A\subseteq I\\ \text{skończony}}} \sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$ ■

Def. Dla wektorów $\{x_i\}_{i\in I}$ w przestrzeni unormowanej X, szereg $\sum_{i\in I} x_i$ jest **(bezwględnie) zbieżny** do wektora $x \in X$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony $K \subseteq I$ taki, że dla dowolnego skończonego $J \subseteq I$ zawierającego K mamy $\| \sum_{i\in J} x_i - x\| < \varepsilon$. Piszemy wtedy $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Def. Bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H nazywamy układ ortonormalny $\{e_i\}_{i \in I}$, który jest maksymalny, tzn. nie istnieje $e \in H$ taki, że układ $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$ jest ortonormalny.

Stw. Każdy układ ortonormalny można rozszerzyć do bazy ortonormalnej. W szczególności każda przestrzeń Hilberta posiada bazę ortonormalną.

Dowód: Teza wynika z Lematu Kuratowskiego-Zorna.

Rzeczywiście, niech $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ będzie ustalonym układem ortonormalnym. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich układów ortonomalnych $\{e'_i\}_{i \in I'} \subseteq H$ roszerzających $\{e_i\}_{i \in I}$, czyli $\{e_i : i \in I\} \subseteq \{e'_i : i \in I'\}$. Jest to zbiór częściowo uporządkowany ze względu na relację inkluzji. Ponadto każda rodzina układów ortonormalnych $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$, która jest liniowo uporządkowana (tzn. jeśli $u, u' \in \mathcal{C}$, to $u \subseteq u'$ albo $u' \subseteq u$) ma ograniczenie górne $\bigcup_{u \in \mathcal{C}} u$. Zatem na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny w $\mathcal{P}$. ∎

Tw. (Charakeryzacje bazy ortonormalnej)

Niech $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq H$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta H. Następujące warunki są równoważne:

1. $\{e_i\}_{i\in I}$ jest **bazą ortonormalną**, tzn. $\{e_i\}_{i\in I}$ jest maksymalnym układem ortonormalnym.
2. układ $\{e_i\}_{i\in I}$ jest **liniowo gęsty** w H, tzn. $\overline{\mathrm{lin}\{e_i : i \in I\}} = H$.
3. Dla każdego $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$, tzn. w nierówności Bessela zachodzi równość (zwaną **tożsamością Parsevala**).
4. Każdy $x \in H$ jest postaci $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $i \in I$.

Liczby $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{F}$ w (4) są wyznaczone jednoznacznie przez x, a mianowicie $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle$ dla $i \in I$. Liczby te nazywane są **współczynnikami Fouriera** elementu x w bazie $\{e_i\}_{i\in I}$.

Dowód: Zauważmy, że jeżeli $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ dla pewnych $\lambda_i \in \mathbb{F}$, to

$$\langle x, e_i\rangle = \langle \sum_{j\in I} \lambda_j e_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} \lambda_j \langle e_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i, \qquad i \in I.$$

Dowodzi to ostatniej części twierdzenia.

(1)⇒(2). Niech $M := \overline{\operatorname{lin}\{e_i : i \in I\}}$ domknięta podprzestrzeń H rozpięta przez $\{e_i\}_{i\in I}$. Jeśli $M \neq H$, to $M^{\perp} \neq \{0\}$, czyli istnieje $e \in M^{\perp}$ taki, że $\|e\| = 1$. Wtedy $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e\}$ jest układem ortonormalnym, co przeczy maksymalności $\{e_i\}_{i\in I}$. Zatem $M = H$.

(2)⇒(3). Niech $x \in H$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje zbiór skończony $A \subseteq I$ oraz $v \in M := \operatorname{lin}\{e_i : i \in A\}$ taki, że $\|x - v\| < \varepsilon$. Zauważmy, że $\dim(M) = |A| < \infty$. Zatem

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 = \|P_M x + (x - P_M x)\|^2 &\overset{Pitagoras}{=} \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \\
&\leqslant \|P_M x\|^2 + \|x - v\|^2 \quad \left\{ \begin{array}{c} \|x - P_M x\| = \\ \inf\limits_{y\in M} \|x - y\| \end{array} \right\} \\
&< \|P_M x\|^2 + \varepsilon^2 \overset{\text{wzór na } P_m}{=} \textstyle\sum_{i\in A} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \varepsilon^2 \\
&\leqslant \textstyle\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

Przechodząc z ε do zera otrzymujemy, że $\|x\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$. Jest to nierówność przeciwna do nierówności Bessela. Stąd równość.

(3)⇒(4). Niech $x \in H$ oraz $\varepsilon > 0$. Szereg $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ jest zbieżny (na mocy tożsamości Parsevala). Zatem istnieje skończony $K \subseteq I$ taki, że dla każdego skończonego $J \subseteq I$ rozłącznego z K mamy $\sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \varepsilon$. Stąd

$$\sum_{i \in I \setminus K} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Weźmy teraz skończony $J \subseteq I$ zawierający K. Zauważmy, że

$$\langle x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j \in J} \langle x, e_i \rangle \delta_{i,j} = \langle x, e_i \rangle \cdot 1_{I \setminus J}(i).$$

Zatem stosując tożsamość Parsevala do wektora $x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$

$$\|x - \textstyle\sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j\|^2 = \sum_{i \in I \setminus J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \sum_{i \in I \setminus K} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Dowodzi to równości $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

(4)⇒(1). Załóżmy nie wprost, że istnieje $e \in H$ taki, że układ $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$ jest ortonormalny. Na mocy założenia $e = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ dla $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $i \in I$. Ale $\lambda_i = \langle e, e_i \rangle = 0$ dla każdego $i \in I$. Zatem $e = 0$, co prowadzi do sprzeczności z warunkiem $\|e\| = 1$. ■

Wn. Jeśli $\{e_i\}_{i\in I}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H, to każdy $x \in H$ jest wyznaczony przez swoje współczynniki Fouriera $\{\langle x, e_i\rangle\}_{i\in I}$ za pomocą tzw. **szeregu Fouriera**

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Joseph Fourier

Ponadto $\|x\| = \sqrt{\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2}$ (tożsamość Parsevala).

Prz. (Standardowa baza w $\ell^2(I)$)

Niech I dowolny zbiór. Rozważmy przestrzeń Hilberta

$$\ell^2(I) := \{x : I \to \mathbb{F} : \sum_{i\in I} |x(i)|^2 < \infty\}.$$

Iloczyn skalarny w $\ell^2(I)$ jest dany wzorem $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x(i)\overline{y(i)}$, a standardową bazę ortonormalną stanowią wektory $\{e_i\}_{i\in I}$, gdzie $e_i(j) = \delta_{i,j}$, dla $j \in I$. Jeśli $I = \mathbb{N}$, to $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$ oraz

$$e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tw. Jeśli $\{e_i\}_{i\in I}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H, to wzór $(Ux)(i) := \langle x, e_i\rangle$ dla $x \in H$, $i \in I$, zadaje izometryczny izomorfizm $U : H \to \ell^2(I)$ (**operator unitarny**). Zatem $H \cong \ell^2(I)$.

Dowód: Z tożsamości Parsevala wynika, że $U : H \to \ell^2(I)$ jest poprawnie określoną izometrią. Liniowość jasna. Surjektywność

Def. Wymiarem przestrzeni Hilberta H nazywamy moc bazy ortonormalnej tej przestrzeni i oznaczamy $\dim(H)$.

Uw. Wymiar przestrzeni Hilberta jest dobrze zdefiniowany, tzn. każde dwie bazy tej samej przestrzeni mają tę samą moc.


Wynika to Twierdzenia Cantora–Bernsteina (poczytać).

Wn. Dwie przestrzenie Hilberta H i K są izometrycznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(H) = \dim(K)$.